OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1900. Nr. 2.

Om Dødelighedstavlers Beregning.

Af

T. N. Thiele.

(Meddelt i Mødet den 23. Marts 1900.)

En mathematisk Behandling af Begrebet Dødelighed kræver, at dette Begreb nærmere defineres ved en Funktion af Alderen x. Den Funktion $f(x)$, som man vil have mest Brug for, er Antallet af levende $l(x)$, som opnaa Alderen x, ud af en Befolkning, som oprindelig tænkes at omfatte en stor Enhed f. Ex. en Million af nyfødte og ikke forøges ved senere Tilgang. Men vil man søge at faa denne Funktion bestemt, tvinges man ind paa Omveje; thi den egner sig hverken til at bestemmes direkte gennem Iagttagelser eller Spekulation. I dens Sted byde Iagttagelserne os fortrinsvis Oplysninger om Dødelighedssandsynligheden $q(x) = 1 - \frac{l(x+a)}{l(x)}$, den Brøkdel af x-aarige, som dø inden a Aars Forløb. Fra Theoriens Side fremkalder denne Funktion den Indvending, at den ikke blot afhænger af x men af det uvæsentlige Interval a, den er end ikke proportional med a, saaledes at $\frac{l(x) - l(x+a)}{a\, l(x)}$ blev Funktion af Alderen x alene. For at opnaa dette maa man gaa til en Grænse, og ved a forstaas et uendelig kort Øjeblik, men herved føres man til Begrebet Dødelighedsstyrke, $\mu(x) = -\frac{d\,l(x)}{l(x)\,dx} = -\frac{d \log l(x)}{dx}$.

Kun dette Begreb, som svarer godt til sit Navn, Dødens vexlende Styrke overfor de forskellige Aldere, egner sig vel baade til theoretisk og empirisk Behandling, ved at tilstede forholdsvis lette Overgange baade til Antallet af levende $l(x)$ og til Dødelighedssandsynlighederne. Her kan der ogsaa hentes Støtte fra Spekulationer ud fra, hvad man ved om Dødsaarsagernes Forhold til de forskellige Aldere.

Om Oldingealderen tør det vist siges, at jo større Dødens Styrke er bleven, desto mere nedbryder den ogsaa de overlevendes Modstandskraft, desto stærkere bliver Dødelighedens egen Tilvæxt. Derpaa er det let at kende Exponentialfunktionerne, og det er allerede længe siden, at Gomperts og Makeham have indført ba^x som Led i $\mu(x)$. Disse Funktioner volde ikke Regnerne store Vanskeligheder, det er ikke dem, der have gjort Problemet om Formlen for $\mu(x)$ berygtet for Vanskelighed. Vil man gaa ned til noget lavere Aldersklasser end de nævnte engelske Mathematikere føre os, behøver man blot at føje en hel algebraisk Funktion af Alderen som Addend til ba^x. Saaledes tvinges man dog hurtigt til at medtage uforholdsmæssigt mange Led i den algebraiske Funktion.

Værre er det med de Aldere, hvori Livet bruges — og misbruges. Denne Del af Dødens Magt synes fra et Intet i Barnealderen at voxe op til et fyldigt Maximum for atter at aftage med den modne Alder og lade Oldingene i Fred. For en 30 Aar siden har jeg foreslaaet at repræsentere denne Del af Dødelighedsstyrken med en Fejllovsfunktion. Med et Led af Formen $de^{\frac{1}{2}(x-n)^2}$, naar man ogsaa bedre Resultater end med den før omtalte hele algebraiske Funktion, hvis denne skulde tages med flere end tre arbitrære Konstanter i Stedet for d, e og n, og altsaa være af højere Grad end 2den. Men skønt Fejllovsfunktionerne ogsaa høre til dem, som tilstede baade Interpolation og Differentiation og Integration, ere de dog langt mindre handlelige end Exponentialfunktionerne, og Iagttagelsernes Tilfældigheder blive i de paagældende Aldere ofte lunefulde nok til at spotte Regnernes Arbejde.

Endelig maa vi betragte Dødens Forhold til Fødselen. Den særlige Voldsomhed, hvormed Døden angriber i det første Minut af den første Time paa den første Dag i første Maaned og Aar, har henledet afdøde Professor Oppermanns Tanke paa Funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}}$, og med $\mu(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$ ere nogle af hans Dødelighedstavler beregnede for de laveste Aldersaar, dog uden jevn Overgang til hans Formler for de højere Aldere. Deri, at Dødelighedsstyrken (og $l(x)$) viser en væsentlig mathematisk Singularitet for $x = 0$, er jeg sikker paa, at Oppermann har Ret, og jeg er ogsaa enig om at prøve paa at forklare denne gennem Kvadratroden af Alderen. Jeg og nogle unge Medhjælpere prøve for Tiden Funktionstheoriens Anvisninger til saadanne Tilfældes Behandling paa 8 forskellige Rækker af Dødelighedsiagttagelser, tre ere helt færdige, de andre nærme sig alle til Afslutning med gunstigt Resultat.

Det simpleste Middel til at fjerne Singulariteten er, synes det mig, at multiplicere $\mu(x)$ med $\sqrt{x}$ og udvikle

$$\sqrt{x}\,\mu(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + b\,a^x$$

efter Iagttagelsernes Bydende. I de fleste og vigtigste Tilfælde, hvor der ikke kræves nogen minutiøs Gengivelse af Barnedødeligheden, vil man vel ogsaa naa Maalet ad denne Vej, muligvis ved Tilføjelse af et enkelt Led af 4de Grad eller ved at indsætte en Fejllovsfunktion i Stedet for tre af de algebraiske Led.

Men i særlig vanskelige eller abnorme Tilfælde er dette dog utilstrækkeligt. Vi føres ind paa et kraftigere men ogsaa tungere Middel ved at bemærke, at

$$\sqrt{x}\,\mu(x) = -\frac{d \log l(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} = -\frac{d \log l(x)}{2d\sqrt{x}}.$$

Vælge vi ikke blot i denne Differentialligning men overalt Kvadratroden af Alderen til uafhængig Variabel og skrive

$$\sqrt{x}\,\mu(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{x} + \gamma_2 + \gamma_3 x\sqrt{x} + \ldots + \beta\alpha^{\sqrt{x}},$$

saa faa vi, som det synes, ikke blot frie Hænder overfor Barnedødeligheden, idet vi regne med æqvidistante Værdier for $\sqrt{x}$, men opnaa samtidig fuld god Fremstilling af Dødeligheden i de højere og højeste Aldere.

De Regninger, hvorpaa jeg bygger denne Paastand, ere ikke gennemførte ved mindste Kvadraters Methode, den langt bekvemmere grafiske Udjevning har været tilstrækkelig; men rigtignok kun ved at følge alle Kunstens Regler. De iagttagne Tal, som jeg i Aften skal omtale, ere hentede fra de engelske Livsforsikringsselskabers Erfaringer om sunde Mænd, H^M, og udtrykke Sandsynlighederne for, at x-aarige dø inden næste Fødselsdag $x + 1$. Diagrammet for denne Funktion ligner meget det for $\mu(x)$, og viser saa bratte Stigninger og Fald, at intet Papir kunde gengive det med tilstrækkelig Nøjagtighed. Øjet vilde begaa grove Fejl ved Kurvens Tegning, og vilde ikke faa nogen Vejledning i at bedømme den vexlende Nøjagtighed i Iagttagelserne fra de forskellige Aldere. Alt dette kan kun opnaas, naar den tegnede Kurve i høj Grad nærmer sig til den rette Linie, som er Figurens Abscisseaxe. Det vil sige, at man ikke skal indtegne selve de iagttagne Tal (her Sandsynlighederne), men deres Differenser, mod en tilnærmet Beregning som Ordinater over Alderen som Abscisse. Derved taber Figuren den Interesse, som den vilde have som Billede paa den søgte Funktion. Men den vinder Beviskraft overfor en kritisk Betragtning. De enkelte Iagttagelsers tilfældige Fejl vise sig tydeligt, og give Maal for de Fordringer, man kan stille til Resultatets Troskab. Enhver Ufuldkommenhed i den tilnærmede Udjevningsregning vil røbe sig ved en umiskendelig Bugtning af Rækken af Iagttagelsernes Prikker, og kan rettes ved en yderst simpel Tegning. Og saaledes arbejde vi med Regning og Tegning om igen, indtil Linien viser sig ret og paa rette Sted.